

Моделирование процесса теплообмена с окружающей средой сгущенного молока с сахаром

Е. А. Большакова, С. В. Мотылев, В. К. Семипятный, А. Г. Кручинин, С. Н. Туровская, Е. Е. Илларионова

Всероссийский
научно-исследовательский
институт молочной
промышленности, г. Москва,
Российская Федерация

АННОТАЦИЯ

Введение: Сгущенное цельное молоко с сахаром (СЦМС) — востребованный продукт среди потребителей и переработчиков. Исследование температурных профилей необходимо для оптимизации его логистики в условиях экстремальных температур, чтобы предотвратить пороки качества и минимизировать затраты на специализированный транспорт при поставках в регионы с жарким климатом и районы Крайнего Севера, с учетом абсолютного температурного диапазона в РФ, составляющего $\sim 90^{\circ}\text{C}$. Ранее данный вопрос в аспекте транспортирования не был исследован, максимально допустимая температура хранения для продукта составляла 25°C , минимальная не регламентировалась.

Цель: Исследование температурных профилей СЦМС в транспортной упаковке при различных условиях окружающей среды.

Материалы и методы: Осуществлено моделирование процессов нагрева и охлаждения СЦМС в транспортной упаковке, представленной в виде одномерной многослойной системы. Для описания задачи теплопередачи в температурных диапазонах от 5°C до 35°C и от 5°C до минус 35°C составлена система дифференциальных уравнений, определены начальные и граничные условия.

Результаты: Согласно построенной модели, продолжительность прогрева СЦМС от 5°C до 35°C составит 36,7 ч, а охлаждения от 5°C до минус 35°C — 41,1 ч. По результатам исследования разработано программное обеспечение для расчета продолжительности изменения температуры СЦМС в зависимости от начальных и конечных температур окружающей среды.

Выводы: Разработан новый подход к теоретическому прогнозированию продолжительности изменения температуры СЦМС в транспортной упаковке при хранении и транспортировании. Данный подход может быть использован в специальных программных обеспечениях для бизнеса при планировании логистических маршрутов, затрат на транспортирование с учетом срока перевозки и условий окружающей среды. Также, предложенное решение может быть адаптировано под другие пищевые продукты.

Ключевые слова: сгущенное молоко с сахаром; теплопередача; одномерное уравнение теплопроводности; свойства воздуха в граничном слое

Корреспонденция:

Екатерина Ивановна

Большакова

E-mail: e_bolshakova@vniimi.org

Конфликт интересов:

авторы сообщают
об отсутствии конфликта
интересов.

Поступила: 10.11.2024

Принята: 15.03.2025

Опубликована: 31.03.2025

Copyright: © 2025 Авторы



Для цитирования: Большакова, Е.И., Мотылев, С.В., Семипятный, В.К., Кручинин, А.Г., Туровская, С.Н., & Илларионова, Е.Е. (2025). Моделирование процесса теплообмена с окружающей средой сгущенного молока с сахаром. *FOOD METAENGINEERING*, 3(1), 56-72. <https://doi.org/10.37442/fme.2025.1.73>

<https://doi.org/10.37442/fme.2025.1.73>

Heat Transfer Modeling in Sweetened Condensed Milk Under Ambient Conditions

Ekaterina I. Bolshakova, Sergey V. Motylev, Vladislav K. Semipyatny, Aleksandr G. Kruchinin, Svetlana N. Turovskaya, Elena E. Illarionova

All-Russian Dairy Research Institute,
Moscow, Russian Federation

ABSTRACT

Introduction: Sweetened condensed whole milk (SCM) is a highly demanded product among consumers and processing plants. The study of temperature profiles is essential for optimizing its logistics under extreme temperature conditions to prevent quality defects and minimize costs associated with specialized transport when delivering to regions with hot climates and the Far North, considering the absolute temperature range in Russia, which is approximately 90°C. Previously, this aspect of transportation had not been studied. The maximum allowable storage temperature for the product was set at 25°C, while the minimum temperature was not regulated.

Purpose: To investigate the temperature profiles of SCM in transport packaging under various ambient conditions.

Materials and Methods: A simulation of the heating and cooling processes of SCM in transport packaging, modeled as a one-dimensional multilayer system, was conducted. To describe heat transfer within the temperature ranges of 5°C to 35°C and 5°C to -35°C, a system of differential equations was formulated, with specified initial and boundary conditions.

Results: According to the proposed model, the duration of heating SCM from 5°C to 35°C is 36.7 hours, while cooling from 5°C to -35°C takes 41.1 hours. Based on the study results, software was developed to calculate the duration of SCM temperature changes depending on the initial and final ambient temperatures.

Conclusion: A new approach has been developed for theoretically predicting the duration of temperature changes in SCM within transport packaging during storage and transportation. This approach can be utilized in specialized business software solutions for logistics route planning, transportation cost estimation, and consideration of ambient conditions during shipping. Additionally, the proposed solution can be adapted for other food products.

Keywords: sweetened condensed milk; heat transfer; one-dimensional heat conduction equation; air properties in the boundary layer

Correspondence:

Ekaterina I. Bolshakova
E-mail: e_bolshakova@vnimi.org

Conflict of interest:

The authors report the absence of a conflict of interest.

Received: 10.11.2024

Accepted: 15.03.2024

Published: 31.03.2025

Copyright: © 2025 The Authors



To cite: Bolshakova E.I., Motylev S.V., Semipyatny V.C., Kruchinin A.G., Turovskaya S.N., & Illarionova E.E. (2025). Heat transfer modeling in sweetened condensed milk. *FOOD METAENGINEERING*, 3(1), 56-72. <https://doi.org/10.37442/fme.2025.1.73>

ВВЕДЕНИЕ

На различных этапах производства и реализации продукта существует ряд факторов, влияющих на его качество: исходные свойства и характеристики сырья, правильное проведение технологических процессов, исправная работа оборудования, условия окружающей среды при транспортировании и хранении (Sharma et al., 2015). Консервы являются группой продуктов, которые сохраняют качество в течение длительного срока годности, так как при их производстве используются модификации принципов анабиоза, а именно термоанабиоз, ксероанабиоз и осмоанабиоз. Данный факт является причиной того, что консервированная продукция является удобным и предпочтительным товаром для экспорта. На сегодняшний день, молочные консервы, а в частности сгущенное цельное молоко с сахаром (СЦМС), является продуктом не только ежедневного рациона потребителей, но также сырьем для производства другой молочной, кондитерской и хлебобулочной продукции (Ryabova et al., 2022). По данным аналитических ресурсов на 2023 год отечественный экспорт сгущенного молока увеличился только по одному направлению на 6,5 млн. \$, а также появились новые производители-экспортеры СЦМС^{1,2}.

В связи с изменяющейся геополитической и экономической ситуацией наблюдается трансформация логистических цепей поставок, что позволяет не только расширить территории для экспорта, но также ставит ряд задач перед производителями (Ledneva et al., 2023; Turovskaya et al., 2024). Известно, например, что сгущенное молоко с сахаром согласно ГОСТ 31688–2012 можно транспортировать всеми видами транспорта при максимально допустимой температуре 25°C, которая указана в ТТИ к данному ГОСТу. Для соблюдения данного требования при транспортировании СЦМС в страны Азии и Африки необходимо использование специализированного транспорта для поддержания регламентированного температурного режима, что является дорогостоящим и ограничивает возможности ряда предприятий (LeBlanc, 2005; Vanek & Sun, 2008; Singh & Negi, 2018). В связи с этим актуальным является исследование изменения температурного профиля СЦМС

в неконтролируемых температурных условиях хранения, который позволит извлечь данные как о продолжительности выравнивания температуры продукта, так и о температуре продукта в любой точке в заданный момент времени.

Экспериментально влияние различных режимов хранения на свойства молочных концентрированных продуктов, СЦМС и его модельных систем было изучено рядом авторов. Так, Galstyan et al. (2019) отметили, что транспортирование сухого цельного молока при температурах более 10°C, а также его замораживание способно спровоцировать деградацию белковой, жировой фракции продукта и вызвать структурные изменения лактозы. Рябовой и соавт. (2022; 2023) изучено изменение критериев кристаллизации воды в модельных молочных концентрированных системах в зависимости от концентрации и температурного воздействия, а также представлены данные по результатам дифференциально сканирующей калориметрии СЦМС. Исследователями зафиксированы значения точки замерзания, массовой доли влаги, перешедшей в замороженное состояние, температуры стеклования и энтальпии плавления, которые могут быть важны при моделировании процессов прогнозирования изменения качества СЦМС при низких отрицательных температурах (Рябова и др., 2022; Рябова и др., 2023). Patel и др. (1996) создали подход к прогнозированию хранимостпособности на основании изменения цветности сладкого концентрированного молока в зависимости от тепловой нагрузки через определение оптической плотности, что является пороком для молочных консервов.

Изменение цвета — не единственный порок, который может развиваться в сгущенных молочных продуктах при хранении в различных температурных диапазонах. Так, например, Sharma et al. (2015) отмечают, что помимо потемнения сгущенного молока с сахаром, наиболее распространенными пороками в продукте являются загустевание, потеря однородности, песчанистость, прогорклость и металлический привкус. Илларионова и соавт. (2020) представили подход к прогнозированию загустевания СЦМС, который заключается в выдержке продукта при 98–100°C в течение 15–20 минут и фикс-

¹ Roif Expert. (2023). Рынок сгущенного молока в России — 2023 экспорт составил + 6,5 млн. \$ по казахскому направлению. VC.ru. <https://vc.ru/u/406653-roif-expert/636061-rynok-sgushchennogo-moloka-v-rossii-2023-eksport-sostavil-6-5-mln-po-kazahskomu-napravleniyu>

² Dairy News. (2023). Вологодская область отправила на экспорт более 90 тонн сгущенного молока. <https://dairynews.today/news/vologodskaya-oblast-otpravila-na-eksport-bolee-90-.html>

Е. А. Большакова, С. В. Мотылев, В. К. Семилятный, А. Г. Кручинин, С. Н. Туровская, Е. Е. Илларионова

сации изменения динамической вязкости. Потеря текучести после такого воздействия принята как основание для отказа от направления данной партии продукта на длительное хранение. Появление загустевания и других пороков обусловлено протеканием процессов биохимического и микробиологического характера (Илларионова и соавт., 2020), которые в свою очередь могут быть ускорены изменением температурных режимов хранения. В то же время, температурная нагрузка на продукт определяется не только температурой, но и продолжительностью хранения при этой температуре (Fox et al., 2015), что в свою очередь обуславливает интерес к оценке динамики изменения температуры продукта в различных условиях.

Существуют различные подходы к изучению процесса теплообмена продукта с окружающей средой и чаще всего они направлены на оценку эффективности тепловой обработки продукции с целью обеспечить ее безопасность (Derossi et al., 2012; Kızıldaş et al., 2010). Так, например, исследователями из США валидирован метод аналитико-прогнозирующего численного решения в двумерном пространстве (2D APNS метод) для моделирования изменения температуры в точке наименьшего прогрева консервной банки во время ретортной обработки (Zhu et al., 2022). В работе рассматривались ограничения APNS метода в одномерном пространстве и был предложен 2D APNS, с помощью которого осуществили моделирование температурных профилей консервов при различных режимах теплопередачи и с учетом нескольких форм контейнеров, в которых находились консервы. Валидацию данного метода исследователи осуществляли при помощи сравнения с экспериментальными данными.

В точки зрения высокотемпературной обработки, Paul et al. (2011) исследовали процесс изменения температуры при пастеризации консервированного молока в банке в двух положениях и произвели сравнение с результатами теоретической модели температурного распределения для точки наименьшего прогрева, полученного с помощью вычислительной гидродинамики. В свою очередь, для зоны отрицательных температур Рябовой и др. (2023) разработана программа расчета времени охлаждения консервной банки со сгущенным молоком, которая позволяет определить время необходимое для охлаждения и замораживания единичной упаковки с продуктом. Конвекция исследователями учтена путем регулирования коэффициента теплоотдачи.

Несмотря на значимость и фундаментальность описанных исследований, характер изменения температуры в продукте в потребительской упаковке и в групповой или транспортной упаковке будет значительно отличаться, так как изменится геометрия исследуемого объекта, которая существенным образом влияет на граничные условия в решаемых системах уравнений. Целью данной работы было решение модельной задачи теплообмена окружающей среды с СЦМС в транспортной упаковке и получение данных о продолжительности выравнивания температуры продукта с окружающей средой и о его температуре в любой точке в заданный момент времени с целью контроля и предотвращения рисков изменения качества продукта в процессе транспортирования. В работе рассматривается температурный диапазон условий окружающей среды от минус 35 до 35°C. В работе рассматривается температурный диапазон условий окружающей среды от минус 35 до 35°C без учета влажности воздуха и изменения температуры, связанного с солнечным излучением.

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Объекты исследования

Основным объектом исследования в работе является модель теплообмена СЦМС в транспортной упаковке с окружающей средой. Рассматриваемая в модели транспортная упаковка с СЦМС объединяет 57 гофрированных коробов, уложенных штабелями в 6 рядов и укомплектованных СЦМС в металлических консервных банках №7 (по 45 банок в каждом коробе). Параметры транспортной упаковки, гофрированного короба и металлической банки представлены в Таблице 1.

Таблица 1
Параметры объектов, используемых в задаче

Table 1
Parameters of the Objects Considered

Объект	Характерные размеры, мм
Металлическая консервная банка №7	Толщина металлического слоя — 0,25
Гофрированный короб	Высота короба — 245, толщина гофры — 4
Транспортная упаковка	Высота — 1492

Представленные объекты в модели объединены в многослойную систему с тремя типами слоев: 1 — гофри-

рованный картон; 2 — СЦМС; 3 — деревянная основа. Параметры многослойной системы представлены в Таблице 2.

Таблица 2

Параметры многослойной системы

Table 2

Parameters of the Multilayer System

Параметры	Значение
Высота первого слоя, мм	4,0
Высота второго слоя, мм	237,0
Высота третьего слоя, мм	22,0
Общая высота	1492,0

В первом приближении теплофизические характеристики слоев в задаче взяты в виде средних значений (Таблица 3), и не учтена их зависимость от температуры.

Таблица 3

Теплофизические характеристики слоев для решения задачи

Table 2

Heat Transfer Properties

№ слоя	ρ , кг/м ³	c_p , Дж/(кг·К)	λ , Вт/(м·К)	α , м ² /с ($\cdot 10^{-5}$)
Слой 1	122	1150,0	0,070	0,049
Слой 2	1290	2260,9	0,267	0,009
Слой 3	500	1550,0	0,150	0,019

Где α — коэффициент температуропроводности

Описание реальной задачи

Транспортная упаковка с СЦМС помещена на деревянном поддоне в сухогрузный контейнер. Сухогрузный контейнер транспортируется от производителя до места реализации в условиях окружающей среды с температурой воздуха в диапазоне от минус 35 до 35°C. Начальная температура СЦМС в транспортной упаковке составляет 5°C. Необходимо рассчитать продолжительность выравнивания температуры СЦМС с окружающей средой в различных условиях и получить данные о температуре СЦМС в любом положении в транспортной упаковке в заданный момент времени. Расчет в задаче производили, используя параметры объектов, указанные в Таблице 1.

Моделирование и математический аппарат

Моделирование на каждом этапе состояло из двух операций: 1 — анализа объектов (характерных размеров, теплофизических характеристик) и их взаимодействия в транспортной упаковке, 2 — введения допущений по принципу оценки минимально и максимально возможного вклада в изменение теплофизических характеристик СЦМС в процессе изменения температуры. Для упрощения описания модели введены следующие обозначения:

S_{C_1} — площадь соприкосновения боковой стенки короба с боковой стенкой банки,

S_{C_2} — площадь соприкосновения боковых стенок двух банок,

S_{C_3} — площадь соприкосновения крышек и доньев банок с верхними и нижними поверхностями короба,

Математическую постановку задачи осуществляли, применяя системы дифференциальных уравнений, описывающих тепловые процессы, начальные и граничные условия. На данном этапе производили упрощение математического описания, учитывая допущения, введенные при составлении физической модели.

Аналитическое решение осуществлено с использованием подхода, представленного в (Biswas & Singh, 2015) с адаптацией под условия теплообмена СЦМС с окружающей средой. Расчет уравнений реализован при использовании разработанного программного обеспечения, написанного в среде Wolfram Mathematica.

РЕЗУЛЬТАТЫ

Моделирование

В задаче изучается изменение температуры СЦМС, упакованного в металлические консервные банки №7, помещенного в транспортную упаковку. Коэффициент теплопроводности (λ) металла, из которого изготовлена консервная банка составляет 47...52 Вт/(м·К), что во много раз превышает $\lambda_{\text{СЦМС}}$ (0,267 Вт/(м·К). Данный факт свидетельствует о том, что скорость теплопередачи через стенку металлической консервной банки будет много больше скорости теплопередачи в среде СЦМС и обуславливает исключение металла из проектируемой модели.

СЦМС находится в групповой упаковке — гофрированном коробе (далее коробе), внутренний объем которого между банками заполнен воздухом. Банки с СЦМС плотно уложены в короб в 3 ряда по ширине, 5 рядов в длину и 3 ряда в высоту. Прилегание боковой стенки одной банки к боковой стенке другой банки внутри короба; боковой стенки банки к боковой стенке короба; дна/крышки одной банки бортами с дном/крышкой другой банки; крышек/доньев с верхней и нижней поверхностью короба будем считать плотным. В результате введенных допущений в модели между всеми контактирующими поверхностями идеальный тепловой контакт.

Передача теплоты от окружающей среды к банке с СЦМС осуществляется через боковые, верхнюю и нижнюю поверхности короба (Рисунок 1).

В первом приближении теплотеплопередачей от боковых поверхностей короба к воздуху внутри короба и от воздуха внутри короба к боковым стенкам банок (Рисунок 1, схема 2) решено пренебречь, так как $\lambda_{\text{воздуха}}$ на порядок меньше $\lambda_{\text{СЦМС}}$, и соответственно тепловой поток по схеме 2 будет много меньше по сравнению с тепловым потоком по схеме 1. Произведем сравнительную оценку вклада тепловых потоков по схеме 1 и 3 (Рисунок 1–3). Так как тепловой поток пропорционален площади ($Q \sim S$), а S_{c1} мала относительно S_{c3} , то при прямой теплопередаче по схеме 3 количество теплоты переда-

ваемое СЦМС через боковую поверхность — Q_1 будет много меньше Q_2 — количества теплоты, передаваемого по схеме 1 через верхние и нижние поверхности короба. Также, так как S_{c2} много меньше S_{c3} теплообменом между контактирующими банками через боковую поверхность по схеме 3 в модели решено пренебречь. Ввиду этого будем считать, что тепловой поток осуществляется по схеме 1 (Рисунок 1), он одномерен и направлен перпендикулярно верхним и нижним поверхностям коробов, а боковая стенка короба и боковые стенки банок — теплоизолированы (адиабатические).

Транспортная упаковка, которая представляет собой прямоугольный параллелепипед, состоящий из 6 рядов коробов с СЦМС в высоту (равномерно уложенных и плотно соприкасающихся боковыми стенками) помещена на деревянный поддон. Верхняя грань поддона состоит из 5 деревянных досок и включает в себя узкие воздушные полости (характерный размер воздушных полостей много меньше ширины досок), в связи с этим было принято учесть поддон в задаче в виде плотной деревянной пластины с толщиной 22 мм, исключив опорные деревянные части поддона.

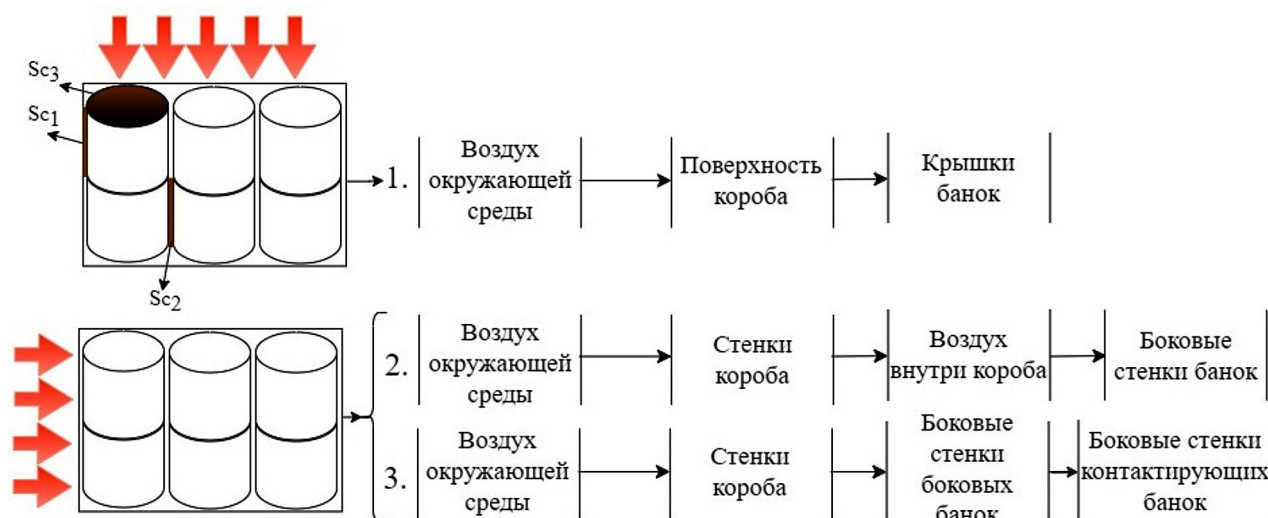
Транспортную упаковку, помещенную на деревянную основу, будем считать подобной групповой упаковке в виде одного короба с СЦМС, т.е. для транспортной упаковки также допускаем одномерность теплового потока. Таким образом, всю транспортную упаковку

Рисунок 1

Схемы осуществления теплопередачи от окружающей среды к СЦМС

Figure 1

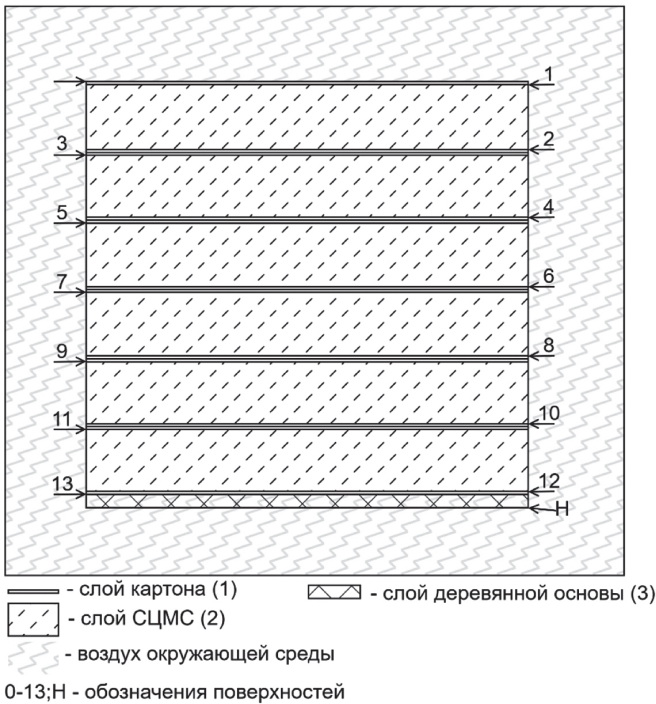
Schemes of Heat Transfer in SCM under Ambient Conditions



Е. А. Большакова, С. В. Мотылев, В. К. Семипятный, А. Г. Кручинин, С. Н. Туровская, Е. Е. Илларионова

Рисунок 2
Модельное представление транспортной упаковки с СЦМС в виде многослойной системы для исследования тепловых процессов

Figure 2
A Model Representation of a Transport Packaging with SCM in the Form of a Multilayer System to Study Heat Transfer



можно представить в виде одномерной многослойной системы (Рисунок 2).

Транспортная упаковка помещена в сухогрузный контейнер (далее контейнер), который заполнен воздухом. Контейнер, в свою очередь изготовлен из стали, материала с высокой теплопроводностью ($\lambda_{\text{стали}}$ при $20^{\circ}\text{C} = 40 \dots 50 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$; $\lambda_{\text{воздуха}} \approx 0,025 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$), который обеспечивает хороший теплообмен с окружающей средой. Данный факт позволяет принять температуру воздуха внутри контейнера равной температуре окружающей среды, так как скорость теплообмена через стенки контейнера выше, чем скорость изменения температуры в транспортной упаковке. В связи с этим, далее в моделировании температура воздуха ($T_{\text{в}}$) внутри контейнера принята равной температуре окружающей среды и неизменной, как и другие теплофизические свойства воздуха в контейнере. На них не влияют теплообменные процессы с транспортной упаковкой с СЦМС.

Теплообмен с окружающей средой транспортной упаковки с СЦМС считали свободным конвекционным, так как вынужденного движения окружающей среды не происходит. Принято, что в начальный момент времени транспортная упаковка с СЦМС имеет определенную начальную температуру во всем объеме.

В «конвекционном» слое — той части воздуха, в которой происходит теплообмен, воздух имеет свой набор теплофизических характеристик, зависящих от температуры поверхности исследуемой системы объектов. Расчет данных характеристик производили на основании табличных значений, представленных в работе Lienhard (2019), при помощи полиномов наилучшим образом их аппроксимирующих (Таблица 4–7).

Объемная плотность (ρ)

Произведен расчет для двух уравнений (подбираем коэффициенты полиномов) и сравнение со справочными значениями, высчитана ошибка аппроксимации, на основании которой произведен выбор уравнения для дальнейших расчетов.

Таблица 4
Определение оптимального уравнения для расчета объемной плотности

Table 4
Determination of the Optimal Equation for Calculating Volume Density

Уравнение №1 — ρ = 353,089/Т Тип — гиперболическая регрессия				Уравнение №2 — ρ = −0,005491+354,683249/Т Тип — гиперболическая регрессия			
Т, К	Рас- четное	Спра- вочное	ε, %	Т, К	Рас- четное	Спра- вочное	ε, %
	ρ, кг/м³				ρ, кг/м³		
250	1,4124	1,4120	0,0252	250	1,4132	1,4120	0,0879
260	1,3580	1,3580	0,0025	260	1,3587	1,3580	0,0497
270	1,3077	1,3080	0,0201	270	1,3082	1,3080	0,0115
280	1,2610	1,2610	0,0025	280	1,2612	1,2610	0,0186
290	1,2175	1,2170	0,0451	290	1,2176	1,2170	0,0455
300	1,1770	1,1770	0,0031	300	1,1768	1,1770	0,0182
310	1,1390	1,1390	0,0003	310	1,1386	1,1390	0,0309
Средняя ошибка аппроксимации			0,0141	Средняя ошибка аппроксимации			0,0375

Для дальнейших расчетов объемной плотности воздуха использовано уравнение №1.

Таблица 5

Определение оптимального уравнения для расчета удельной изобарной теплоемкости

Table 5

Determination of the Optimal Equation for Calculating the Specific Isobaric Heat Capacity

Удельная изобарная теплоемкость (c_p)

Уравнение №1 — $c_p = 0,000370 \cdot T^2 - 0,187343 \cdot T + 1029,668537$ Тип — квадратичная регрессия				Уравнение №2 — $c_p = 0,019256 \cdot T + 1001,466942$ Тип — линейная регрессия			
T, K	Расчет- ное c_p , Дж/(кг·К)	Спра- вочное	ε, %	T, K	Расчет- ное c_p , Дж/(кг·К)	Спра- вочное	ε, %
250	1006,0	1006,0	0,004	250	1006,3	1006,0	0,028
260	1006,0	1006,0	0,003	260	1006,5	1006,0	0,047
270	1006,1	1006,0	0,006	270	1006,7	1006,0	0,066
280	1006,2	1006,0	0,022	280	1006,9	1006,0	0,085
290	1006,5	1006,0	0,045	290	1007,1	1006,0	0,104
300	1006,8	1007,0	0,023	300	1007,2	1007,0	0,024
310	1007,1	1007,0	0,015	310	1007,4	1007,0	0,043
Средняя ошибка аппроксимации			0,017	Средняя ошибка аппроксимации			0,057

Для дальнейших расчетов удельной изобарной теплоемкости воздуха использовано уравнение №1 (Таблица 6).

Для дальнейших расчетов динамического коэффициента вязкости воздуха использовано уравнение №1, так как значение средней ошибки аппроксимации для первого уравнения больше по причине выброса для температуры 310 К (Таблица 7).

Для дальнейших расчетов коэффициента теплопроводности воздуха использовано уравнение №2.

С помощью полиномов представленных выше рассчитаны теплофизические свойства воздуха для каждой температуры. Согласно Lienhard (2019) и Churchill и др. (1975) свойство среды (воздуха в задаче) следует оценивать при так называемой «определяющей температуре» $T_{опр}$:

$$T_{опр} = \frac{T_n + T_n}{2}, \quad (1)$$

где T_n — температура продукта в начальный момент времени; T_b — температура воздуха.

Таблица 6

Определение оптимального уравнения для расчета динамического коэффициента вязкости

Table 6

Determination of the Optimal Equation for Calculating the Dynamic Viscosity Coefficient

Динамический коэффициент вязкости (μ)

Уравнение №1 — $\mu = 0,000000043 \cdot x^3 - 0,000038698 \cdot x^2 + 0,016251762 \cdot x - 0,714935371$ Тип — кубическая регрессия				Уравнение №2 — $\mu = -0,00000311 \cdot T^2 + 0,00665672 \cdot T + 0,12896873$ Тип — квадратичная регрессия			
T, K	Расчет- ное $\mu \cdot 10^{-5}$, Па·с	Спра- вочное	ε, %	T, K	Рас- четное $\mu \cdot 10^{-5}$, Па·с	Спра- вочное	ε, %
250	1,601	1,606	0,295	250	1,599	1,606	0,450
260	1,650	1,649	0,079	260	1,649	1,649	0,029
270	1,698	1,699	0,040	270	1,700	1,699	0,033
280	1,746	1,747	0,082	280	1,749	1,747	0,116
290	1,792	1,795	0,150	290	1,798	1,795	0,160
300	1,839	1,857	0,982	300	1,846	1,857	0,588
310	1,885	1,889	0,199	310	1,894	1,889	0,248
Средняя ошибка аппроксимации			0,261	Средняя ошибка аппроксимации			0,232

Таблица 7

Определение оптимального уравнения для расчета коэффициента теплопроводности

Table 7

Determination of the Optimal Equation for Calculating the Coefficient of Thermal Conductivity

Коэффициент теплопроводности (λ)

Уравнение №1 — $\lambda = 0,000065 \cdot x^3 - 0,059624 \cdot x^2 + 25,158592 \cdot x - 1336,027099$ Тип — кубическая регрессия				Уравнение №2 — $\lambda = -0,005622 \cdot x^2 + 10,598080 \cdot x - 55,398903$ Тип — квадратичная регрессия			
T, K	Расчет- ное λ	Спра- вочное	ε, %	T, K	Расчет- ное λ	Спра- вочное	ε, %
250	0,02243	0,02241	0,08	250	0,02243	0,02241	0,08
260	0,02317	0,02329	0,51	260	0,02323	0,02329	0,38
270	0,02390	0,02400	0,43	270	0,02396	0,02400	0,16
280	0,02461	0,02473	0,50	280	0,02471	0,02473	0,07
290	0,02531	0,02544	0,52	290	0,02545	0,02545	0,05
300	0,02600	0,02623	0,86	300	0,02618	0,02618	0,19
310	0,02670	0,02684	0,53	310	0,02690	0,02684	0,21
Средняя ошибка аппроксимации			0,49	Средняя ошибка аппроксимации			0,16

Таким образом были получены следующие теплофизические характеристики для каждого дискретного значения температуры (Таблица 8).

Кинематический коэффициент вязкости рассчитывали по уравнению:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (2)$$

Коэффициент объемного расширения:

$$\beta = \frac{1}{T} \quad (3)$$

Коэффициент температуропроводности:

$$\alpha = \frac{\lambda}{c_p \cdot \rho} \quad (4)$$

Основная сложность расчета заключалась в определении коэффициента конвективной теплоотдачи (α), который входит в граничные условия Ньютона-Рихмана для конвективного теплообмена.

Для вычисления данного коэффициента обычно применяется теория подобия физических процессов. Ее

основная идея состоит в том, что процессы одинаковой физической природы, которые характеризуются одним и тем же математическим описанием (дифференциальными уравнениями, граничными и начальными условиями) и одинаковой геометрией должны протекать похожим образом. Согласно теории подобия, такие качественно одинаковые процессы имеют равные критерии подобия и функциональные связи между ними. Это позволяет, используя критерии подобия, полученные экспериментальным путем для модельных задач, применить для вычисления критериев подобия для конкретной задачи.

Для описания процессов свободной конвекции применяются следующие критериальные числа подобия:

Pr — число Прандтля, Nu — число Нуссельта, Ra — число Релея, Gr — число Грасгофа.

Число Прандтля:

$$Pr = \mu \frac{c_p}{\lambda} \quad (5)$$

Таблица 8

Теплофизические свойства сухого воздуха при давлении 101 325 Па

Table 7

Thermophysical Properties of Dry Air at a Pressure of 101 325 Pa

$T_{в'}$ (°C)	$T_{н'}$ (°C)	$T_{онп'}$ (°C)	$T_{онп'}$ (K)	ρ , (кг/м³)	c_p , Дж/(кг·K)	μ ($\cdot 10^{-5}$), Па·с	λ , Вт/(м·K)	ν ($\cdot 10^{-5}$), м²/с	α ($\cdot 10^{-5}$), м²/с	β , 1/K	Pr
-35	5	-15,0	258,15	1,37	1005,96	1,64	0,023	1,20	1,68	0,0039	0,72
-30	5	-12,5	260,65	1,35	1005,97	1,65	0,023	1,22	1,71	0,0038	0,72
-25	5	-10,0	263,15	1,34	1005,99	1,67	0,023	1,24	1,74	0,0038	0,71
-20	5	-7,5	265,65	1,33	1006,01	1,68	0,024	1,26	1,77	0,0038	0,71
-15	5	-5,0	268,15	1,32	1006,04	1,69	0,024	1,28	1,80	0,0037	0,71
-10	5	-2,5	270,65	1,30	1006,07	1,70	0,024	1,30	1,83	0,0037	0,71
-5	5	0,0	273,15	1,29	1006,10	1,71	0,024	1,33	1,86	0,0037	0,71
0	5	2,5	275,65	1,28	1006,14	1,73	0,024	1,35	1,89	0,0036	0,71
5	5	5,0	278,15	1,27	1006,19	1,74	0,024	1,37	1,92	0,0036	0,71
10	5	7,5	280,65	1,26	1006,23	1,75	0,025	1,39	1,96	0,0036	0,71
15	5	10,0	283,15	1,25	1006,29	1,76	0,025	1,41	1,99	0,0035	0,71
20	5	12,5	285,65	1,24	1006,34	1,77	0,025	1,43	2,02	0,0035	0,71
25	5	15,0	288,15	1,23	1006,41	1,78	0,025	1,46	2,05	0,0035	0,71
30	5	17,5	290,65	1,21	1006,47	1,80	0,026	1,48	2,09	0,0034	0,71
35	5	20,0	293,15	1,20	1006,55	1,81	0,026	1,50	2,12	0,0034	0,71

Число Нуссельта

$$Nu = \frac{\alpha l_0}{\lambda}, \quad (6)$$

Число Грасгофа:

$$Gr = \frac{\Delta T \cdot g \cdot \beta \cdot l^3}{\nu^2}, \quad (7)$$

где ΔT — разность температур, g — ускорение свободного падения, β — коэффициент объемного расширения, l — определяющий размер, ν — коэффициент кинематической вязкости.

Число Релея:

$$Ra = Gr \cdot Pr. \quad (8)$$

Тогда критериальное уравнение подобия будет иметь вид:

$$Nu = F(Ra). \quad (9)$$

Далее рассчитав число Нуссельта по (6) будет получено значение коэффициента конвективной теплоотдачи (α).

$$\alpha = Nu \cdot \frac{\lambda}{l_0}, \quad (10)$$

где $l_0 = S/P$ (площадь поверхности к периметру) — характерный размер поверхности многослойной системы. В данной задаче $l_0 = 0,214$.

Нестабильность процесса естественной конвекции у поверхностей различной формы и расположения в пространстве породила большое разнообразие эмпирических формул для вида критериального уравнения (9). В отечественной теплотехнической литературе для решения задачи подобной, поставленной нами в работе, используются критериальные уравнения, указанные в работе Михеева и Михеевой (1977) и Исаченко и др. (1981).

Если при принудительной конвекции результаты расчета числа Нуссельта по критериальным уравнениям у различных авторов фактически идентичны, то при естественной конвекции отличаются на существенные 20–30 %.

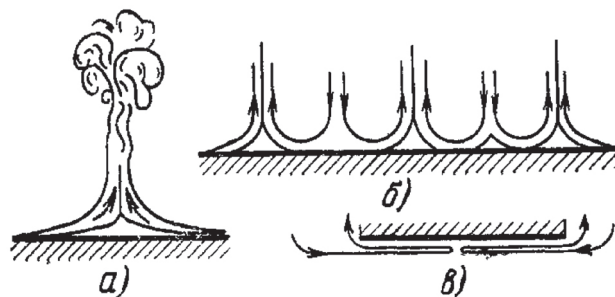
Согласно Михееву и Михеевой (1977), если нагретая поверхность обращена наверх, то движение протекает по схеме, изображенной на Рисунке 3 — а или 3 — б.

Рисунок 3

Теплоотдача при свободной конвекции

Figure 3

Heat Transfer under Free Convection



Примечание. Из Михеев и Михеева (1977)

Вследствие наличия с краев сплошного потока нагретого воздуха центральная часть поверхности оказывается изолированной. Свободное конвекционное движение воздуха у поверхности происходит лишь за счет притока холодного воздуха сверху (Рисунок 3 — б). Если же нагретая поверхность обращена вниз, то в этом случае движение воздуха происходит лишь в тонком слое под поверхностью (Рисунок 3 — в); остальная же масса воздуха ниже этого слоя остается неподвижной.

В поставленной задаче возможны следующие схемы теплообмена:

(1) Температура воздуха больше температуры многослойной системы (нагрев продукта)

Тогда у верхней поверхности (обращена вверх) — свободное конвекционное движение воздуха по схеме (Рисунок 3 — в), а у нижней поверхности (обращена вниз) — неустойчивая конвекция по схеме (Рисунок 3 — а или б).

(2) Температура воздуха меньше температуры многослойной системы (охлаждение продукта)

Ситуация противоположна описанной выше. У верхней поверхности (обращена вверх) — неустойчивая конвекция (Рисунок 3 — а или б), а у нижней поверхности — стабильная (Рисунок 3 — в).

Стабильность и неустойчивость процесса учитывалась в расчёте критериального числа Нуссельта по соответствующим критериальным уравнениям (11,12), предложенными Fujii и др. (1972), Rohsenow (1998):

Е. А. Большакова, С. В. Мотылев, В. К. Семилятный, А. Г. Кручинин, С. Н. Туровская, Е. Е. Илларионова

для неустойчивого процесса (Nu_1):

$$Nu_1 = \frac{0,560 \cdot Ra^{1/4}}{\left[1 + \left(\frac{0,492}{Pr}\right)^{9/16}\right]^{4/9}}; \quad (11)$$

для устойчивого процесса (Nu_2):

$$Nu_2 = 0,58 \cdot Ra^{1/5}. \quad (12)$$

Неустойчивый процесс протекает при условии $T_b < T_n$ на верхней поверхности многослойной системы, а при $T_b > T_n$ на нижней поверхности. Устойчивый процесс протекает на нижней поверхности при $T_b < T_n$ и на верхней поверхности при $T_b > T_n$.

Результаты расчетов критериальных чисел представлены в Таблице 9.

Таблица 9

Расчетные значения критериальных чисел для задачи

Table 9

Calculated Values of the Criterion Numbers

$T_b, ^\circ\text{C}$	$T_n, ^\circ\text{C}$	$T_{\text{опр}}, ^\circ\text{C}$	$Gr \cdot 10^6$	$Ra \cdot 10^6$	Nu_1	Nu_2
-35	5	-15,0	103,0	73,7	39,9	21,7
-30	5	-12,5	86,3	61,7	38,1	21,0
-25	5	-10,0	70,8	50,6	36,3	20,2
-20	5	-7,5	56,5	40,4	34,3	19,3
-15	5	-5,0	43,4	30,9	32,1	18,3
-10	5	-2,5	31,2	22,2	29,5	17,1
-5	5	0,0	19,9	14,2	26,4	15,6
0	5	2,5	9,6	6,8	22,0	13,5
5	5	5,0	0,0	0,0	0,0	0,0
10	5	7,5	8,8	6,3	21,5	13,3
15	5	10,0	17,0	12,0	25,3	15,1
20	5	12,5	24,5	17,4	27,7	16,3
25	5	15,0	31,4	22,2	29,5	17,1
30	5	17,5	37,7	26,7	30,9	17,7
35	5	20,0	43,5	30,8	32,0	18,2

Примечание. Где Nu_1, Nu_2 — число Нуссельта для неустойчивой и устойчивой конвекции, соответственно; $T_{\text{опр}}$ — определяющая температура

Результаты расчета коэффициента теплоотдачи (α_1, α_2) для каждой дискретной температуры представлены в Таблице 10.

Таблица 10

Значение коэффициента теплоотдачи для каждой дискретной температуры

Table 10

The Value of the Heat Transfer Coefficient for Each Discrete Temperature

$T_b, ^\circ\text{C}$	$T_n, ^\circ\text{C}$	α_1	α_2
$T_b < T_n$			
-35	5	4,30	2,34
-30	5	4,15	2,28
-25	5	3,98	2,21
-20	5	3,79	2,13
-15	5	3,57	2,04
-10	5	3,32	1,92
-5	5	2,99	1,77
0	5	2,51	1,54
$T_b > T_n$			
10	5	1,54	2,49
15	5	1,76	2,96
20	5	1,91	3,26
25	5	2,02	3,50
30	5	2,12	3,69
35	5	2,19	3,85

Примечание. Где T_b — температура среды (ГУ), T_n — начальная температура продукта (НУ), α_1 — коэффициент теплоотдачи у верхней поверхности (ГУ), α_2 — коэффициент теплоотдачи у нижней поверхности (ГУ).

Таким образом, на границе с окружающей средой у верхней и нижней поверхностей многослойной системы граничные условия Ньютона-Рихмана. Также, допущено, что между слоями внутри многослойной системы идеальный тепловой контакт и значения температуры и плотности тепловых потоков на границе слоев равны в любой момент времени.

Пределы применимости модели

Геометрическая форма

Укладка параллелепипед, мы считаем, что погрешность будет невелика для реальной формы, но возможны отклонения.

Свободный подход к вычислению коэффициента теплоотдачи

Наши допущения достаточно свободны, так как нет достаточно хорошей модели для свободной конвекции,

мы выбираем рекомендации одних авторов, по другим авторам — будут отклонения.

Возможность возникновения фазовых переходов

Модель не учитывает возможные фазовые переходы (замерзание) вещества. Рассматриваем температуры окружающей среды предположительно до возможных фазовых переходов вещества, так как фазовые переходы изменяют физические свойства среды (плотность, удельная теплоемкость и коэффициент теплопроводности и др.).

Математическая постановка задачи

В соответствии с введенными приближениями и допущениями поставлена следующая математическая постановка задачи.

Аналитическое описание процесса теплопроводности включает систему дифференциальных уравнений, начальные условия и граничные условия. Дифференциальное уравнение теплопроводности в отсутствии внутренних источников теплоты имеет вид:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right). \quad (13)$$

- 1) Начальные условия $T(\tau = 0)$ — температура продукта в начальный момент времени
- 2) Граничные условия 1–4 типа

Здесь важна форма и геометрические размеры объекта.

Дифференциальные уравнения совместно с так называемыми условиями однозначности (начальные условия и граничные условия) формирует законченную математическую формулировку задачи. То есть, зная геометрическую форму исследуемого объекта, начальные и граничные условия, представляется возможным решить дифференциальные уравнения до конца и найти функцию температуры $T(x, y, z, \tau)$.

Для постановки математической задачи, соответствующей физической модели уравнение теплопроводности (13) будем считать одномерным (переменная X), граничные условия на верхней и нижней поверхностях первого и последнего слоя 3-го типа, а условия на границах раздела других слоев — 4-го типа.

Постановка задачи имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial T_1}{\partial \tau} = \alpha_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} \\ \frac{\partial T_2}{\partial \tau} = \alpha_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial T_3}{\partial \tau} = \alpha_3 \frac{\partial^2 T_3}{\partial x^2} \end{cases} \quad (14)$$

Начальные условия:

$$\begin{cases} \tau = 0 \\ T_1 = T_2 = T_3 = T_{\text{н}}' \end{cases} \quad (15)$$

где $T_{\text{н}}$ — начальная температура продукта.

Граничные условия:

$$\begin{cases} x = 0 & \lambda_1 \left(\frac{\partial T_1}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} = \alpha_1 (T_1 \Big|_{x=0} - T_{\text{в}}) \\ x = H & -\lambda_3 \left(\frac{\partial T_3}{\partial x} \right) \Big|_{x=H} = \alpha_2 (T_3 \Big|_{x=H} - T_{\text{в}}) \end{cases} \quad (16)$$

$$1 \leq i \leq 13$$

$$\begin{cases} T_i \Big|_{x_i} = T_{i+1} \Big|_{x_i} & i \in [1, 12] \\ \lambda_i \left(\frac{\partial T_i}{\partial x} \right) \Big|_{x_i} = \lambda_{i+1} \left(\frac{\partial T_{i+1}}{\partial x} \right) \Big|_{x_i} & \dots \\ T_i \Big|_{x_{i+1}} = T_{i+1} \Big|_{x_{i+1}} & i = 13 \\ \lambda_i \left(\frac{\partial T_i}{\partial x} \right) \Big|_{x_{i+1}} = \lambda_{i+1} \left(\frac{\partial T_{i+1}}{\partial x} \right) \Big|_{x_{i+1}} & \end{cases}$$

Аналитическое решение задачи теплопроводности для многослойной системы

Для решения многослойной задачи (17–19) мы воспользовались аналитическим решением, представленным в (Fuji and Imura, 1972) и адаптировали его для условий теплопередачи окружающей среды с СЦМС в транспортной упаковке. Принцип суперпозиции гласит, что решение может быть представлено в виде:

$$T_i(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_n(t) R_{i,n}(x) + q_i(x, t), \quad (17)$$

где $T_i(x, t)$ — температура i -го слоя;

$R_{i,n}(x)$ — собственные функции i -го слоя, обладающие свойством ортогональности друг к другу;

$\Gamma_n(t)$ — временная часть для n -й собственной функции, обладает свойством независимости от слоя;

$q_i(x, t)$ — вспомогательная функция, гомогенизирующая граничные условия (16), вида:

$$q_i(x, t) = \begin{cases} T_B \alpha_1 \frac{\sigma - x}{\alpha_1 \sigma + \lambda_1}, & i = 1 \\ 0, & i = 2..13 \\ T_B \alpha_3 \frac{x - H + 1}{\alpha_3 l + \lambda_3}, & i = 14 \end{cases} \quad (18)$$

Вид вспомогательной функции (18) обусловлен тем, что температура на концах является статичной, поэтому отсутствует зависимость от времени.

Собственные функции решения имеют вид:

$$R_{i,n}(x) = C_{i,n} \sin(\Lambda_{i,n} x) + D_{i,n} \cos(\Lambda_{i,n} x) \quad (19)$$

$$\Lambda_{i,n} = \Lambda_{1,n} \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_i}},$$

где $\Lambda_{i,n}$ — собственные числа. Поиск коэффициентов $C_{i,n}$ и $D_{i,n}$ осуществляется вычислением детерминанта системы уравнений для собственных функций (Antonopoulos and Tzivanidis, 1996).

Общий вид временной части $\Gamma_n(t)$:

$$\Gamma_n(t) = f_n e^{-a_1 \Lambda_{1,n}^2 t} \quad (20)$$

$$f_n = \frac{1}{N_n} \sum_{i=1}^{14} \frac{\lambda_i}{a_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [T_{11} - q_i(x, 0)] R_{i,n}(x) dx$$

$$N_n = \sum_{i=1}^{14} \frac{\lambda_i}{a_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} R_{i,n}^2(x) dx$$

В общем виде функция $\Gamma_n(t)$ имеет более сложный вид, но так как выражение для температуры воздуха (14–16) не зависит от времени, лапласиан и производная от времени вспомогательных функций $q_i(x, t)$ обнуляются и не участвуют в суммировании при построении $\Gamma_n(t)$. При этом, имеется возможность обобщения решения на флуктуирующие показатели температуры воздуха, моделирующие изменение дневной температуры, или температуры во время транспортировки.

Решение уравнения (17) продемонстрировано на Рисунке 4. Решение уравнений (17–20), позволяет получать температурные профили для произвольных начальных температур в исследованном диапазоне от минус 35°C до 35°C.

Для вычисления данной задачи при суммировании использовались первые собственные функций, отвечающих собственным числам, для достижения общей погрешности от истинного решения, не превышающей 5%. В большинстве случаев было равно 3.

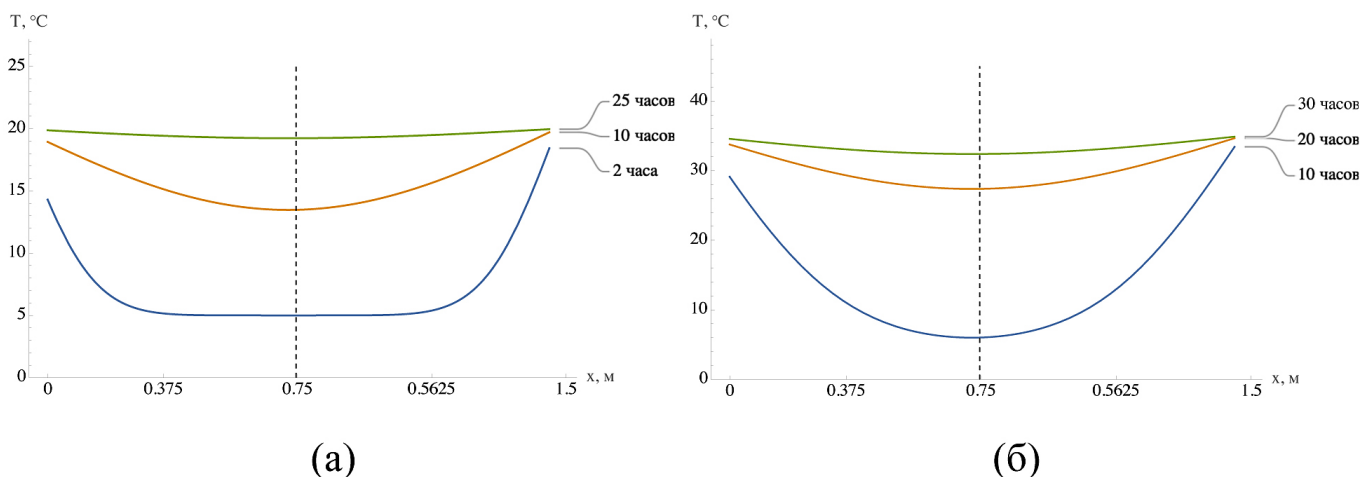
Как можно отметить из рисунка, влияние гофрированных слоев и слоя дерева на решение хоть и является минимальным, но все-таки можно наблюдать смещение профиля от симметричности в сторону, где имеется больше проводящих слоев. Также, аналитическое решение задачи позволило определить продолжительность изменения температуры исследуемого объекта, которая составила при максимальных температурных

Рисунок 4

Температурный профиль многослойной системы с ЦМС для начальных температур $T_n = 5^\circ\text{C}$ (а) $T_B = 20^\circ\text{C}$, (б) $T_B = 35^\circ\text{C}$

Figure 4

Temperature Profile of the Multilayer System with SCM for Initial Temperatures $T_p = 5^\circ\text{C}$ and (a) $T_a = 20^\circ\text{C}$, (b) $T_a = 35^\circ\text{C}$



напорах 36,7 ч для диапазона от 5°C до 35°C и 41,1 ч для диапазона от 5°C до минус 35°C.

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Учитывая активное развитие цифровых технологий, являющихся неотъемлемой частью промышленной революции — Индустрии 4.0., в различных сферах экономики (строительстве, автомобилестроении, текстильной промышленности и др.) осуществляется массовая цифровизация процессов с целью их оптимизации и повышения эффективности (Nagar & Sreenivasa, 2024). Одним из популярных инструментов цифровизации является математическое моделирование процессов (Medennikov & Raikov, 2020; Erdogdu, 2023), и исследователи по всему миру создают модели объектов, оборудования и процессов, которые в дальнейшем они апробируют в реальных условиях для оценки эффективности разработок (Hu et al., 2013; Destro et al., 2021; Bunta et al., 2023). В нашей работе было осуществлено моделирование теплопередачи СЦМС с окружающей средой с целью дальнейшего применения разработанной модели в прогнозировании продолжительности изменения температуры продукта при транспортировании. Авторами был принят ряд серьезных допущений, которые упростили конечную модель, а именно пренебрежение геометрией металлических банок с СЦМС внутри транспортного пакета, исключение учета фазовых переходов, наличия воздушных прослоек внутри коробов с продуктом, конвективных потоков внутри продукта, а также тепловых потоков со стороны боковых стенок исследуемой системы объектов. Сравнение с двумерными моделями теплопроводности, например, с моделью в сферических координатах, представленной в (Jain & Singh, 2010), показало, что при выборе достаточного количества членов временного ряда, одномерная послойная модель приближается к ним с произвольным уровнем точности для исследованной схемы с рядом банок сгущенного молока. Что касается исключения конвективных потоков внутри продукта, в работе Rao & Anantheswaran (1988) показано, что конвективный теплообмен оказывает значительное влияние на температурные профили жидких продуктов с низкой вязкостью, таких как соки или бульоны. Однако для продуктов с высокой вязкостью, таких как СЦМС, конвекционные потоки минимальны, и теплообмен осуществляется преимущественно за счет теплопроводности, что также подтверждается в работе (Kumar et

al., 1990). В исследовании Friso (2015) для моделирования тепловых процессов консервированных продуктов также исключались факторы, связанные с конвекцией внутри продукта и сложной геометрией банок, так как весь подход ученых был сосредоточен на изучении точки наименьшего прогрева в банке — ключевом критерии при оценке эффективности стерилизации. Однако данный подход не полностью применим к нашей задаче, поскольку нас интересует не только температура в точке наименьшего прогрева, но и её распределение по всей системе объектов в различные моменты времени. Также, Friso (2015) отмечает проблему значительных трудозатрат при использовании численного метода при решении задачи теплообмена, в связи с чем он делает выбор в пользу аналитического решения, аналогично выбранному и в нашей работе. При этом, например, в (Antonopoulos & Tzivanidis, 1996) используется более общий аналитический подход к решению одномерной задачи теплопроводности для произвольных конвективных граничных условий. Поэтому адаптация аналитического решения из (Biswas & Singh, 2015) выглядела более перспективно, так как авторы продемонстрировали возможность отказаться от явного вычисления вспомогательной функции при условиях, схожих с условиями хранения СЦМС, что существенно сократило требуемые вычислительные мощности.

Таким образом, введенные в модель допущения и примененные в данной работе подходы к моделированию теплопередачи соответствуют решениям, используемым другими исследователями теплообмена. Отличительной чертой нашего исследования является то, что комбинация выбранных методов позволила создать инструмент для решения практических задач в области транспортирования СЦМС — стратегически значимого пищевого продукта, при этом сделав его оптимальным по вычислительным трудозатратам.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе данной работы была установлена возможность применения одномерной модели теплообмена для прогнозирования продолжительности изменения температуры СЦМС в расширенном диапазоне температур, что позволяет сократить трудозатраты в сравнении с моделированием в многомерном пространстве. Основным результатом исследования — разработка подхода к одномерному моделированию процесса теплообмена СЦМС с окружающей средой, его описание

и создание самой модели. Также, продемонстрирована возможность построения аналитического вида уравнений для температуры слоев. Исследованный математический аппарат позволяет распространить решение задачи для флуктуирующих амбиентных температур, а полученные результаты в целом делают возможным проведение апробации созданной модели и сравнение с эмпирическим исследованием СЦМС. Ограничением разработанного подхода является отсутствие учета фазовых переходов, что может стать следующей задачей в рамках дальнейшей модернизации подхода. Доказательство эффективности созданной модели, что также является закономерным следующим шагом, способно расширить поле специальных программных обеспечений для бизнеса при планировании логистических маршрутов, затрат на транспортирование с учетом срока перевозки и условий окружающей среды. Кроме того, предложенное решение может быть адаптировано для других пищевых продуктов.

АВТОРСКИЙ ВКЛАД

Большакова Екатерина Ивановна: проведение исследования, методология, создание черновика рукописи, создание рукописи и ее редактирование, визуализация, администрирование данных, администрирование проекта.

Мотылев Сергей Владимирович: проведение исследования, методология, верификация данных создание черновика рукописи, формальный анализ.

Семипятный Владислав Константинович: проведение исследования, методология, создание черновика рукописи, формальный анализ.

Кручинин Александр Геннадьевич: методология, ресурсы, создание рукописи и ее редактирование, руководство исследованием, администрирование проекта.

Туровская Светлана Николаевна: администрирование данных, создание рукописи и ее редактирование.

Илларионова Елена Евгеньевна: ресурсы, создание рукописи и ее редактирование.

AUTHOR CONTRIBUTIONS

Ekaterina I. Bolshakova: investigation, methodology, draft manuscript preparation, manuscript writing and editing, visualization, data administration, project administration.

Sergey V. Motylev: investigation, methodology, data verification, draft manuscript preparation, formal analysis.

Vladislav K. Semipyatny: investigation, methodology, draft manuscript preparation, formal analysis.

Aleksandr G. Kruchinin: methodology, resources, manuscript writing and editing, research supervision, project administration.

Svetlana N. Turovskaya: data administration, manuscript writing and editing.

Elena E. Illarionova: resources, manuscript writing and editing.

ЛИТЕРАТУРА/REFERENCES

- Илларионова, Е. Е., Туровская, С. Н., & Радаева, И. А. (2020). К вопросу увеличения срока годности молочных консервов. *Актуальные вопросы молочной промышленности, межотраслевые технологии и системы управления качеством*, 1(1), 225–230. <https://doi.org/10.37442/978-5-6043854-1-8-2020-1-225-230>
- Illarionova, E. E., Turovskaya, S. N., & Radaeva, I. A. (2020). To the question of increasing of canned milk storage life. *Aktual'nye voprosy molochnoj promyshlennosti, mezhotraslevye tehnologii i sistemy upravleniya kachestvom*, 1(1), 225–230. <https://doi.org/10.37442/978-5-6043854-1-8-2020-1-225-230>
- Исаченко, В. П., Осипова, В. А., & Сукомел, А. С. (1981). Теплопередача. Москва: Энергоиздат.
- Isachenko, V. P., Osipova, V. A., & Sukomel, A. S. (1981). *Heat transfer*. Moscow: Energoizdat.
- Леднева, И. А., Пацай, Л. С., & Кармызов, А. В. (2023). Трансформация логистических цепей поставок в современных экономических условиях. *Научные труды белорусского государственного экономического университета*, 210–216. Белорусский государственный экономический университет.

- Ledneva, I., Patsay, L., & Karmyzov, A. (2023). Transformation of logistics supply chains in modern economic conditions. *Nauchnye trudy belorusskogo gosudarstvennogo ekonomicheskogo universiteta* (pp. 210–216). Belarus State Economic University.
- Рябова, А. Е., Бурков, И. А., Семипятный, В. К., Пряничникова, Н. С., & Галстян, А. Г. (2023). *Программа расчета времени охлаждения жестебанки сгущенного молока* (Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2023663645). Всероссийский научно-исследовательский институт молочной промышленности.
- Ryabova, A. E., Burkov, I. A., Semipyatny, V. K., Pryanichnikova N. S., & Galstyan A. G. (2023). *Programma rascheta vremeni oxlazhdeniya zhestebanki sgushhennogo moloka* (Svidetel'stvo o gosudarstvennoj registracii programmy` dlya E`VM № 2023663645). Vserossijskij nauchno-issledovatel'skij institut molochnoj promy'shlennosti.
- Туровская, С. Н., Кручинин, А. Г., Илларионова, Е. Е., & Большакова, Е. И. (2024). Исследование воздействия критических температур внешней среды на сгущенное молоко с сахаром. *Вестник КрасГАУ*, 1(202, 189–200). <https://doi.org/10.36718/1819-4036-2024-1-189-200>
- Turovskaya, S. N., Kruchinina, G., Illarionova, E., & Bolshakova, E. I. (2024). Study of the critical ambient temperatures impact on sweetened condensed milk. *Bulletin of KSAU* (pp. 189–200). <https://doi.org/10.36718/1819-4036-2024-1-189-200>
- Antonopoulos, K. A., & Tzivanidis, C. (1996). Analytical solution of boundary value problems of heat conduction in composite regions with arbitrary convection boundary conditions. *Acta Mechanica*, 118, 65–78. <https://doi.org/10.1007/BF01176344>
- Biswas, P., & Singh, S. (2015). Analytical solution of 1-D multilayer heat conduction problem with time varying ambients. In *23rd National and 1st International ISHMT-ASTFE Heat and Mass Transfer Conference* (p. 1–9). Trivandrum.
- Bunta, O., Festila, D., Muresan, V., Coloși, T., Stan, O. P., Unguresan, M. L., & Baciut, M. (2023). Mathematical modeling and digital simulation of teeth dynamics for the approximation of orthodontic treatment duration. *Applied Sciences*, 13(10), 5932. <https://doi.org/10.3390/app13105932>
- Churchill, S. W., & Chu, H. H. S. (1975). Correlating equations for laminar and turbulent free convection from a vertical plate. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 18, 1323–1329. [https://doi.org/10.1016/0017-9310\(75\)90235-2](https://doi.org/10.1016/0017-9310(75)90235-2)
- Derossi, A., de Pilli, T., La Penna, M. P., & Severini, C. (2012). Prediction of heating length to obtain a definite F value during pasteurization of canned food. *Journal of Food Process Engineering*, 36, 211–219. <https://doi.org/10.1111/j.1745-4530.2012.00686.x>
- Destro, F., Hur, I., Wang, V., Abdi, M., Feng, X., Wood, E., Coleman, S., Firth, P., Barton, A., Barolo, M., & Nagy, Z. K. (2021). Mathematical modeling and digital design of an intensified filtration-washing-drying unit for pharmaceutical continuous manufacturing. *Chemical Engineering Science*, 244, 116803. <https://doi.org/10.1016/j.ces.2021.116803>
- Erdogdu, F. (2023). Mathematical modeling of food thermal processing: Current and future challenges. *Current Opinion in Food Science*, 51, 101042. <https://doi.org/10.1016/j.cofs.2023.101042>
- Fox, P. F., Uniacke-Lowe, T., McSweeney, P. L. H., & O'Mahony, J. A. (2015). Heat-Induced changes in milk. In *Dairy Chemistry and Biochemistry* (pp. 345–375). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-14892-2_9
- Fujii, T., & Imura, H. (1972). Natural-convection heat transfer from a plate with arbitrary inclination. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 15, 755–767. [https://doi.org/10.1016/0017-9310\(72\)90063-1](https://doi.org/10.1016/0017-9310(72)90063-1)
- Galstyan, A. G., Petrov, A. N., Illarionova, E. E., Semipyatniy, V. K., Turovskaya, S. N., Ryabova, A. E., Khurshudyan, S. A., Vafin, R. R., & Radaeva, I. A. (2019). Effects of critical fluctuations of storage temperature on the quality of dry dairy product. *Journal of Dairy Science*, 102, 10779–10789. <https://doi.org/10.3168/jds.2019-17229>
- Hu, D., Zhang, H., Li, L., Zhou, R., & Sun, Y. (2013). Mathematical modeling, design and optimization of conceptual configuration of soil-like substrate bioreactor based on system dynamics and digital simulation. *Ecological Engineering*, 51, 45–58. <https://doi.org/10.1016/j.ecoleng.2012.12.037>
- Kızıltaş, S., Erdoğdu, F., & Palazoğlu, T. K. (2010). Simulation of heat transfer for solid–liquid food mixtures in cans and model validation under pasteurization conditions. *Journal of Food Engineering*, 97, 449–456. <https://doi.org/10.1016/j.jfoodeng.2009.11.024>

- Kumar, A., Bhattacharya, M., Blaylock, J. (1990). Numerical simulation of natural convection heating of canned thick viscous liquid food products. *Journal of Food Science*, 55(5), 1403–1411. <https://doi.org/10.1111/j.1365-2621.1990.tb03946.x>
- LeBlanc, D. (2005). Land transportation of fresh fruits and vegetables: An update. *Stewart Postharvest Review*, 1(1), 1–13. <https://doi.org/10.2212/spr.2005.1.4>
- Lienhard, J. H. (2019). *A heat transfer textbook* (5th ed.). Courier Dover Publications.
- Medennikov, V., & Raikov, A. N. (2020). Formation of the Digital Platform for Precision Farming with Mathematical Modeling. In *DAMDID/RCDL* (Supplementary Proceedings) (pp. 121–133). CEUR Workshop Proceedings.
- Medennikov, V., & Raikov, A. (2021). Optimizing of product logistics digital transformation with mathematical modeling. *Journal of Physics: Conference Series*, 1864(1), 012100. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1864/1/012100>
- Micheev, M. A., & Micheeva, I. M. (1977). *Basics of heat exchange* (2nd ed.). Energiya.
- Nagar, S., & Sreenivasa, S. (2024). Mathematical modeling, numerical simulation and experimental validation of temperature profiles of PCMs and their applications in industry 4.0: A review. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 238(17), 8850–8876. <https://doi.org/10.1177/09544062241242704>
- Patel, A. A., Gandhi, H., Singh, S., & Patil, G. R. (1996). Shelf-life modeling of sweetened condensed milk based on kinetics of Maillard browning. *Journal of Food Processing and Preservation*, 20, 431–451.
- Paul, D. A., Anishaparin, A., & Anandharamakrishnan, C. (2011). Computational fluid dynamics studies on pasteurisation of canned milk. *International Journal of Dairy Technology*, 64, 305–313. <https://doi.org/10.1111/j.1471-0307.2011.00687.x>
- Rao, M. A., & Anantheswaran, R. C. (1988). Convective heat transfer to fluid foods in cans. In *Advances in food research* (vol. 32, pp. 39–84). Academic Press.
- Rohsenow, W. M., Hartnett, J. P., & Cho, Y. I. (1998). *Handbook of heat transfer* (3rd ed.). McGraw-Hill.
- Ryabova, A., Tolmachev, V., & Galstyan, A. (2022). Phase transitions of sweetened condensed milk in extended storage temperature ranges. *Food Processing: Techniques and Technology*, 52, 526–535. <https://doi.org/10.21603/2074-9414-2022-3-2379>
- Ryabova, A. E. (2023). Study of the thermophysical properties of sweetened condensed milk. *Food Industry*, 5(2), 52–55. <https://doi.org/10.52653/ppi.2023.2.2.012>
- Singh, B. K., and Negi, S. (2018). Cold chain logistics: An impediment in the perishable food industry of India. *International Journal of Logistics Economics and Globalisation*, 7(4), 332. <https://doi.org/10.1504/ijleg.2018.10018593>
- Sharma, P., Patel, H., & Patel, A. (2015). *Evaporated and sweetened condensed milks*. In *Dairy Processing and Quality Assurance* (pp. 310–332). <https://doi.org/10.1002/9781118810279.ch13>
- Vanek, F., & Sun, Y. (2008). Transportation versus perishability in life cycle energy consumption: A case study of the temperature-controlled food product supply chain. *Transportation Research Part D: Transport and Environment*, 13(6), 383–391. <https://doi.org/10.1016/j.trd.2008.07.001>
- Zhu, S., Li, B., & Chen, G. (2022). Improving prediction of temperature profiles of packaged food during retort processing. *Journal of Food Engineering*, 313, 110758. <https://doi.org/10.1016/j.jfoodeng.2021.110758>